

Απειροστικός Λογισμός I, 2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Έστω A, B δυο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} . Θεωρούμε το σύνολο $\Gamma = \{a + \beta : a \in A, \beta \in B\}$. Δείξτε ότι $\sup \Gamma = \sup A + \sup B$ και $\inf \Gamma = \inf A + \inf B$.

2. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι αν $x \neq 1$ και $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με τύπο $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Αφού δείξετε ότι η f ορίζεται καλά (πρέπει για $x \in [0, 1]$ να δειχθεί ότι $\frac{1-x}{1+x} \in [0, 1]$), να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και επί και να βρεθεί η αντίστροφή της. (Μπορείτε να μετασχηματίσετε τον τύπο της f ώστε το x να εμφανίζεται μόνο σε ένα σημείο στον τύπο της f).

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x+1)^2 + 3$. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. Να βρείτε την εικόνα $f([-1, +\infty))$ της f και στη συνέχεια, αντικαθιστώντας το πεδίο τιμών με το σύνολο τιμών της f , να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης αυτής.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Να δείξετε ότι η f μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα $f = g + h$ με την g να είναι άρτια και την h περιττή. Στη συνέχεια δείξτε ότι η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδική.